

الباب الرابع: متسلسلات الأعداد

١ متسلسلات الأعداد وتقاربها

المتسلسلات هي نوع من أنواع المتتابعات، تكون حدودها على صورة مجاميع متتالية، أي ينتج كل مجموع من المجموع السابق بإضافة قيمة تعتمد على n . ولأن المتسلسلات نوع خاص من المتتابعات فيمكن دراسة تقاربها بطرق جديدة، كما أن لها تطبيقات عديدة سنراها في هذا الفصل والفصول التالية.

١-١- تعريف: لتكن $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ متتابعة من الأعداد، المتسلسلة المكونة من الحدود a_k هي متتابعة المجاميع الجزئية $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعطاة بالعلاقة

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

يسمى a_k بالحد العام للمتسلسلة، وسنرمز للمتسلسلة بالرمز $\sum a_k$.

من الواضح من هذا التعريف أننا يمكننا دراسة تقارب المتسلسلة، وأن تقارب المتسلسلة يعني تقارب متتابعة المجاميع الجزئية.

١-٢- تعريف: يقال أن المتسلسلة $\sum a_k$ تقاربية إذا كانت متتابعة المجاميع الجزئية لها تقاربية، وفي حالة التقارب نقول أن نهاية متتابعة المجاميع الجزئية هي مجموع المتسلسلة ونكتب

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

الخواص الجبرية لمجموعة المتسلسلات التقاربية لا تختلف كثيراً عن الخواص الجبرية لمجموعة المتتابعات التقاربية، ويمكن تلخيصها في النظرية التالية:

٣-١- نظرية: لتكن $\sum a_k$ و $\sum b_k$ متسلسلتان تقاربيتان من الأعداد، فإن

(١) المتسلسلة $\sum (ak + b_k)$ تقاربية ومجموعها

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

(٢) لأي عدد حقيقي λ تكون المتسلسلة $\sum \lambda a_k$ تقاربية ومجموعها

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

برهان هذه النظرية تطبيق مباشر للنظرية المناظرة للمتتابعات (٩٩).

٤-١- أمثلة:

(١) لندرس المتسلسلة $\sum r^{k-1}$ ، هذه المتسلسلة نسمى متسلسلة هندسة أساسها r .
من السهل حساب S_n بالطريقة التالية (نفرض إن $r \neq 1$):

$$S_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-2} + r^{n-1}$$

$$r S_n = r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1} + r^n$$

بالطرح ينتج

$$S_n(1 - r) = 1 - r^n$$

أي أن

$$S_n = \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

لدراسة التقارب الآن ننظر للمقدار r^n فنلاحظ أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{عندما } |r| < 1, \\ +\infty & \text{عندما } r > 1, \\ \text{غير معينة} & \text{عندما } r < -1 \end{cases}$$

وبالتالي فإن المتسلسلة تقاربية إذا وفقط إذا كان $|r| < 1$ وفي هذه الحالة يكون

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^{k-1} = \frac{1}{1 - r}$$

(٢) المتسلسلة $\sum a_k$ حيث $a_k = 1/k(k+1)$ يمكن أيضاً حساب مجاميعها الجزئية بطريقة بسيطة نسمى طريقة الفروق:

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

وبالتالي فإن

$$\begin{aligned} S_n &= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

فينتج أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$$

أي أن المتسلسلة تقاربية.

(٣) لنأخذ الآن $a_k = 1/k^2, k \geq 1$ وندرس المتسلسلة $\sum a_k$. ليس من السهل هنا إيجاد صيغة للمجموع الجزئي S_n لذا نلجأ لأسلوب آخر. فنلاحظ أن

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{k(k+1)}, \quad k \geq 1$$

وهو ما يعطي

$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 + 1 - \frac{1}{n+1} < 2$$

وحيث أن المتتابعة $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ نزائدية ومحدودة من أعلى فإنها تقاربية.

(٤) سندرس المتسلسلة التوافقية $\sum \frac{1}{k}$. لنرى ماذا نعلم عن S_n عندما $n = 2^m$ و $m \in \mathbb{N}$:

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2$$

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 2 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{2}$$

يمكن استنتاج العلاقة:

$$(١) \quad S_{2^m} \geq \frac{m+2}{2}$$

سنثبت صحة هذه العلاقة بالاستنتاج الرياضي على m . من الواضح صحة العلاقة لقيم

$n = 0, 1, 2, 3$ ، نبرهن الآن خطوة الاستنتاج:

$$\begin{aligned}
 S_{2^{m+1}} &= \sum_{k=1}^{2^{m+1}} \frac{1}{k} \\
 &= \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{k} \\
 &\geq \frac{m+2}{2} + \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{k} \quad (\text{من فرض الاستنتاج}) \\
 &\geq \frac{m+2}{2} + \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{2^{m+1}} \quad \left(\text{لأن } \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2^{m+1}} \text{ لأي } k \leq 2^{m+1} \right) \\
 &\geq \frac{m+2}{2} + \frac{2^m}{2^{m+1}} = \frac{m+3}{2}
 \end{aligned}$$

ينتج من ذلك صحة العلاقة (١).

نؤدي تلك العلاقة إلى: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ ، أي أن المتسلسلة التوافقية تباعدية.

(٥) المتسلسلة $\sum a_k$ حيث $a_k = \frac{1}{3^k} - \frac{3}{k^2}$ هي عبارة عن مجموع متسلسلتين تقاربيتين $\sum b_k, \sum c_k$ حيث $b_k = \frac{1}{3^k}, c_k = -\frac{3}{k^2}$ فهي بالتالي متسلسلة تقاربية من نظرية جبر المتسلسلات التقاربية.

(٦) على العكس: إذا كانت $a_k = \frac{1}{k} - \frac{3}{k^2}$ فإن تقارب $\sum a_k$ يستلزم تقارب $\sum (a_k + 3\frac{3}{k^2})$ ، لكن $a_k + 3\frac{3}{k^2} = \frac{1}{k}$ والمتسلسلة $\sum \frac{1}{k}$ تباعدية، ينتج إذن أن المتسلسلة $\sum a_k$ تباعدية.

يمكننا أيضاً ترجمة شرط كوشي لتقارب المتتابعات لحالة المتسلسلات، فنحصل على:

٥-١- نظرية: متسلسلة الأعداد $\sum a_k$ تتقارب إذا وفقط إذا تحقق شرط كوشي:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \left(\forall n > n_0, \forall p \in \mathbb{N}^* : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon \right)$$

برهان - نضع $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ، نعلم أن تقارب المتتابعة $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ يكافئ تحقق شرط كوشي لها (؟؟)، أي تحقق

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} (\forall n > n_0, \forall p \in \mathbb{N}^* : |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon)$$

لكن هذا الشرط هو بالضبط شرط كوشي المعطى في النظرية.

٦-١ - مثال: لندرس المتسلسلة $\sum a_k$ حيث $a_k = \frac{(-1)^k}{k}$ نلاحظ أن

$$\frac{1}{n+k+1} - \frac{1}{n+k+2} \leq \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1}$$

وبالتالي يكون

$$\begin{aligned} |S_{n+p} - S_n| &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + \cdots + \frac{(-1)^p}{n+p} \\ &\leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{(-1)^p}{n+p} \\ &\leq \frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+p} < \frac{3}{n+1} \end{aligned}$$

باستخدام شرط كوشي نجد أن هذه المتسلسلة تقاربة.

ينتج من شرط كوشي نتيجة هامة

٧-١ - نظرية (اختبار الحد العام): إذا كانت متسلسلة الأعداد $\sum a_k$ تقاربية فإن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

برهان - ننتج هذه النتيجة مباشرة بوضع $p = 1$ في شرط كوشي

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} (\forall n > n_0 : |S_{n+1} - S_n| < \varepsilon)$$

وهو ما يعني أن $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

تستخدم النتيجة السابقة عادة لإثبات تباعد متسلسلة وذلك عندما نجد أن نهاية الحد العام للمتسلسلة لا تساوي الصفر، بينما لا يمكن استخدامها لإثبات التقارب كما يوضح مثال المتسلسلة التوافقية: فهي متسلسلة حدها العام يؤول للصفر لكنها تباعدية.

٨.١ أسئلة. اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي

- (١) المتسلسلة هي

()	مجموع لانهائي
()	ليست متتابة
- (٢) تقارب المتسلسلة $\sum a_k$

()	يكافئ تقارب المتتابة $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$
()	يستلزم تقارب المتتابة $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$
()	يكافئ أن $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n_0}^n a_k \in \mathbb{R}$
()	يستلزم تقارب المتتابة $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- (٣) أي متسلسلة تقاربية تكون مجاميعها الجزئية

()	ثابتة
()	محدودة
()	تؤول للصفر
()	تزايدية
- (٤) إذا كانت $\sum a_k$ تقاربية و $\sum b_k$ تباعدية وكانت $c_k = a_k - b_k$ فإن $\sum c_k$

()	تباعدية
()	تقاربية
()	تؤول للمالانهاية
()	تؤول للصفر

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 &\implies \sum a_k \text{ تباعدية } () & \sum a_k \text{ تباعدية } \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 & () \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 &\implies \sum a_k \text{ تباعدية } () & \sum a_k \text{ تباعدية } \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 & () \end{aligned} \quad (5)$$

٩.١ تمارين

(١) إدرس تقارب كل من المتسلسلات $\sum a_k$ التالية باستخدام تعريف التقارب مباشرة وفي حالة التقارب أوجد مجموعها:

$$\begin{aligned} (ا) \quad a_k &= 3^k & (هـ) \quad a_k &= \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} \\ (ب) \quad a_k &= \frac{3^k}{\pi^k} & (و) \quad a_k &= \frac{k-1}{k!} \\ (ج) \quad a_k &= \frac{9}{10^k} & (ز) \quad a_k &= \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\ (د) \quad a_k &= \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} & (ح) \quad a_k &= \ln\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) \end{aligned}$$

(٢) ليكن $N \in \mathbb{N}^*$ و لتكن $m_1, \dots, m_N$ متتابعة من الأعداد الصحيحة بحيث $m_k = k - 1$ لكل $k > N$. برهن أن $\sum \frac{m_k}{k!}$ تقاربية ومجموعها عدد قياسي.

(٣) لتكن $\sum a_k$ متسلسلة من الأعداد ولتكن $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. نضع

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n S_k \right)$$

برهن أنه إذا كانت $\sum a_k$ تقاربية ومجموعها يساوي A فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = A$.
يقال أن المتسلسلة قابلة للجمع بطريقة سيزارو (Cesaro summable) إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$ موجودة.

(٤) إدرس تقارب المتسلسلات $\sum a_k$ التالية باستخدام شرط كوشي واختبار الحد العام:

$$\begin{aligned} (ا) \quad a_k &= k & (د) \quad a_k &= \frac{(-1)^k}{k(k+1)} \\ (ب) \quad a_k &= \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k & (هـ) \quad a_k &= \frac{k^k}{k!} \\ (ج) \quad a_k &= \frac{(-1)^k}{k} & (و) \quad a_k &= \frac{\sum_{i=1}^k (1/j)}{k(k+1)} \end{aligned}$$

(٥) لكل من العبارات الآتية وضح ما إذا كانت العبارة صحيحة أم خاطئة، برهن العبارة إن كانت صحيحة أو أعط مثلاً يبين أنها خاطئة.

- إذا كانت المتسلسلتان $\sum a_k$ و $\sum b_k$ تباعديتان فإن $\sum (a_k + b_k)$ تباعدية.
- إذا كانت المتسلسلتان $\sum a_k^2$ و $\sum (a_k + b_k)^2$ تقاربيتان فإن $\sum a_k b_k$ تقاربية.
- إذا كانت $\sum a_k$ تقاربية فإن $\sum \frac{a_k}{k(k+1)}$ تقاربية.
- إذا كانت $\sum a_k$ تقاربية فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} k a_k = 0$.
- إذا كانت $\sum a_k$ تقاربية وكانت $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$ فإن $\sum a_k b_k$ تقاربية.
- إذا كانت $\sum a_k$ تقاربية وكانت $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 1$ فإن $\sum a_k b_k$ تقاربية.

٢ اختبارات تقارب المتسلسلات ذات الحدود غير السالبة

التقارب المطلق والتقارب المشروط

رأينا في الفصل السابق أن المتسلسلة $\sum (-1)^k/k$ تقاربية بينما المتسلسلة المكونة من القيم المطلقة للحدود $|a_k| = \frac{1}{k}$ تباعدية. مثل هذه المتسلسلة تسمى متسلسلة مشروطة التقارب.

١-٢- تعريف: نقول أن المتسلسلة $\sum a_k$ تقاربية مطلقاً إذا كانت المتسلسلة $\sum |a_k|$ تقاربية. ونقول أن $\sum a_k$ تقاربية مشروطاً إذا كانت تقاربية بينما $\sum |a_k|$ تباعدية.

يمكننا فهم هذا التعريف بملاحظة أن التقارب المطلق ينتج من أنه لقيم n الكبيرة تكون الحدود a_n بالغة الصغر في القيمة المطلقة لدرجة يمكن عندها إهمال ما تضيفه للمجموع، بينما ينتج التقارب المشروط من أن الحدود a_n تكون مختلفة في الإشارة عن بعضها البعض مما يجعلها تلاشي الإضافات.

٢-٢- نظرية: إذا كانت المتسلسلة $\sum a_k$ تقاربية مطلقاً فإن $\sum a_k$ تقاربية.

برهان - نضع $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ، $T_n = \sum_{k=1}^n |a_k|$ نفرض أن $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تقاربية. من شرط كوشي للتقارب لدينا

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} (\forall n > n_0, \forall p : |T_{n+p} - T_n| < \varepsilon)$$

وحيث أن

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| = T_{n+p} - T_n$$

فإن

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} (\forall n > n_0, \forall p : |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon)$$

باستخدام شرط كوشي مرة ثانية ينتج أن $\sum a_k$ تقاربية.

اختبارات التقارب للمتسلسلات ذات الحدود الموجبة

دراسة التقارب المطلق أسهل نسبياً من دراسة التقارب المشروط وذلك لأنه عندما تكون $a_n \geq 0$ فإن متتابعة المجاميع الجزئية $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تكون تزايدية وبالتالي تتقارب إذا وفقط إذا كانت محدودة من أعلى، سنثبت فيما يلي أول اختبارات التقارب للمتسلسلات ذات الحدود الموجبة:

٢-٣- نظرية (إختبار التكامل): لتكن f دالة متصلة و تناقصية و غير سالبة على الفترة $[1, +\infty[$ ، ولتكن $a_k = f(k)$ تحقق $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ فإن

(١) كما أن النهاية $E = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k - \int_1^n f(x) dx \right)$ موجودة و يكون

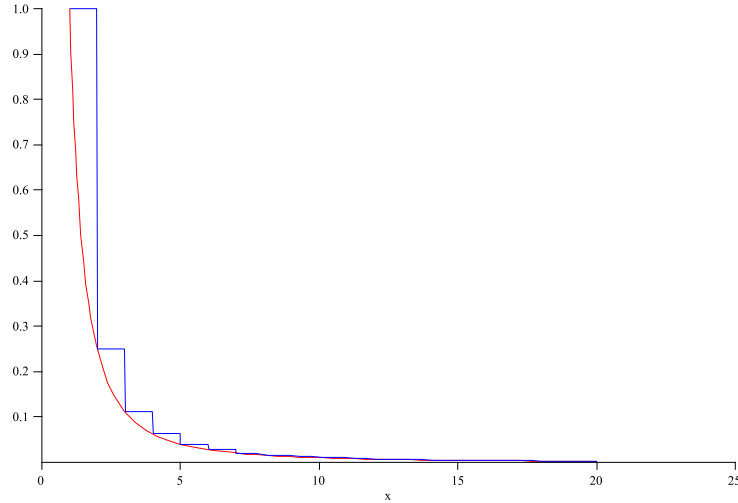
$$\left| \sum_{k=1}^n a_k - \int_1^n f(x) dx - E \right| = O(a_n)$$

(٢) متسلسلة الأعداد $\sum a_k$ تتقارب إذا و فقط إذا كان التكامل المعتل $\int_1^\infty f(x) dx$ تقاربي.

برهان - نضع $e_n = \sum_{k=1}^n a_k - \int_1^n f(x) dx$ كما نعرف الدالة

$$g(x) = a_k \iff x \in [k, k+1], \quad k \in \mathbb{N}^*$$

من الواضح أن $a_k = g(x) \geq f(x) \geq a_{k+1}$ لكل $x \in [k, k+1[$.



منحنى $f(x)$ (بالأحمر)، $g(x)$ (بالأزرق)

ومن ذلك

$$\int_1^n f(x) dx \leq \int_1^{n-1} g(x) dx = \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

لدينا بالتالي:

$$\begin{aligned}
e_n - e_{n+1} &= \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n+1} a_k + \int_1^{n+1} f(x) dx - \int_1^n f(x) dx \\
&= \int_n^{n+1} f(x) dx - a_{n+1} \geq 0 \\
&\quad (\text{لأن } f \text{ تناقصية}) \\
e_n &= \sum_{k=1}^n a_k - \int_1^n f(x) dx \\
&\geq \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_n \geq 0
\end{aligned}$$

أي أن المتتابة $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تناقصية ومحدودة من أسفل، بالتالي فإنها تقاربية لعدد حقيقي E .

المتباينة الثانية في النظرية تنتج من:

$$\begin{aligned}
e_m - E &= \lim_{k \rightarrow \infty} e_m - e_{m+k+1} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=m}^{m+k} (e_n - e_{n+1}) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=m}^{m+k} \int_n^{n+1} f(x) dx - a_{n+1} \\
&\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=m}^{m+k} (a_n - a_{n+1}) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} a_m - a_{m+k+1} = a_m
\end{aligned}$$

وهو ما يثبت أن $e_m - E = O(a_m)$.
لدينا

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = e_n + \int_1^n f(x) dx = e_n + I_n$$

وحيث أن $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تقاربية فإن تقارب $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ يكافئ تقارب $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ، أي أن المتسلسلة تقاربية إذا وفقط إذا كان التكامل المعتل تقاربياً.

٤-٢- مثال: لندرس المتسلسلة $\sum 1/k^p$ حيث $p > 0$ ، نأخذ $f(x) = 1/x^p$ ونطبق اختبار التكامل فنجد أن التكامل $\int_1^\infty f(x) dx$ تقارب إذا وفقط إذا كانت $p > 1$ ، بالتالي المتسلسلة لتقارب عندما $p > 1$ وتباعد عندما $p \leq 1$.

الاختبار الأساسي لتقارب المتسلسلات ذات الحدود غير السالبة هو اختبار المقارنة:

٥-٢- نظرية (إختبار المقارنة): إذا كانت $0 \leq a_k \leq b_k$ وكانت $\sum b_k$ تقاربية، فإن $\sum a_k$ تقاربية.

برهان - ليكن $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ و $T_n = \sum_{k=1}^n b_k$ ولنفرض أن $\sum b_k$ تقاربية. من شرط كوشي نجد أن

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} (\forall n > n_0, \forall p : T_{n+p} - T_n \varepsilon)$$

وحيث أن

$$S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k = T_{n+p} - T_n$$

فإن

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} (\forall n > n_0, \forall p : S_{n+p} - S_n \varepsilon)$$

وهو ما يؤدي لتقارب $\sum a_k$ من شرط كوشي.

ينتج من اختبار المقارنة اختباران آخران عمليان هما إختبار النسبة وإختبار الجذر النوني:

٦-٢- نظرية (إختبار النسبة): إذا كانت $0 < a_k$ وكانت $\ell = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ فإن

(١) في حالة $\ell < 1$ فإن $\sum a_k$ تكون تقاربية.

(٢) في حالة $\ell > 1$ فإن $\sum a_k$ تكون تباعدية.

برهان -

(١) لنكن $\ell < 1$ ولنأخذ ρ بحيث $\ell < \rho < 1$. نثبت باستخدام الاستنتاج الرياضي أن

$$a_k \leq a_1 \rho^{k-1} = b_k$$

وحيث أن المتسلسلة الهندسية $\sum a_1 \rho^k$ أساسها $\rho < 1$ فهي تقاربية. ينتج من اختبار المقارنة أن $\sum a_k$ تقاربية.

(٢) لنكن $\ell > 1$ ولنأخذ ρ بحيث $\ell > \rho > 1$. نثبت باستخدام الاستنتاج الرياضي أن

$$a_k \geq a_1 \rho^{k-1}$$

وحيث أن المتسلسلة الهندسية $\sum a_1 \rho^k$ أساسها $\rho > 1$ فهي تباعدية. ينتج من اختبار المقارنة أن $\sum a_k$ تباعدية.

٧-٢- نظرية (إختبار الجذر النوني): إذا كانت $0 < a_k$ وكانت $\ell = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k}$ فإن

(١) في حالة $\ell < 1$ فإن $\sum a_k$ تكون تقاربية.

(٢) في حالة $\ell > 1$ فإن $\sum a_k$ تكون تباعدية.

برهان - مشابه للبرهان السابق.

٨-٢ - أمثلة:

(١) لتكن $a_k = \frac{1}{k^2(\ln k + 5)}$ ، من الواضح أن $a_k \leq 1/k^2$ وحيث أن $\sum 1/k^2$ تقاربة (كما

أثبتنا باستخدام اختبار التكامل) فإن $\sum a_k$ تقاربة أيضا (من اختبار المقارنة).

(٢) يمكن إثبات تقارب المتسلسلة $\sum \frac{1}{k!}$ بطريقتين: الأولى هي مقارنة $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k(k-1)}$ $\Rightarrow k \geq 2$ ،

وحيث أن المتسلسلة $\sum \frac{1}{k(k-1)}$ تقاربة (يمكن حساب المجاميع الجزئية مباشرة) فإن اختبار المقارنة يؤدي لتقارب المتسلسلة $\sum \frac{1}{k!}$.

الطريقة الثانية هي استخدام اختبار النسبة:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1/(k+1)!}{1/k!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} = 0 < 1$$

وبالتالي فإن $\sum \frac{1}{k!}$ تقاربة.

(٣) لتكن $a_k = k^{-k/3}$ ، من السهل إثبات أن

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1/3} = 0$$

وبالتالي فإن اختبار الجذر النوني يؤكد أن $\sum a_k$ تقاربة.

٩-٢ - أمثلة:

(١) لندرس تقارب المتسلسلة $\sum \frac{1}{k!}$ ، نستخدم اختبار النسبة فنجد

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} = 0 < 1$$

وبالتالي فإن المتسلسلة تقاربة.

(٢) لتكن $\sum \frac{1}{k^k}$ ، نستخدم اختبار الجذر النوني لدراسة تقارب المتسلسلة، نجد أن

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0 < 1$$

أي أن المتسلسلة تقاربة.

(٣) المتسلسلة $\sum \frac{k!(-1)^k}{k^k}$ يمكن دراسة تقاربها باستخدام اختبار النسبة، لكن ذلك الإختبار ينطبق فقط على المتسلسلات ذات الحدود غير السالبة، لذا نتعامل مع القيم المطلقة:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{k+1} \right)^k = \frac{1}{e} < 1$$

وبالتالي فإن المتسلسلة تقاربة تقارب مطلق.

(٤) لنكن $\sum \frac{2^k}{k^{10}}$ ، نستخدم إختبار الجذر النوني لدراسة تقارب المتسلسلة. نجد أن

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} 2\sqrt[k]{k^{10}} = \lim_{k \rightarrow \infty} 2(\sqrt[k]{k})^{10} = 2 > 1$$

أي أن المتسلسلة تباعدية.

١٠.٢ أسئلة. إدرس صحة أو خطأ كل من العبارات التالية:

(١) إذا كانت $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ دالة تناقصية ومتصلة وكان $\int_1^\infty f(x) dx$ تقاربي فإن المتسلسلة $\sum f(k)$ تقاربية.

(ب) يمكن استنتاج تقارب المتسلسلة $\frac{(-1)^k}{k}$ بتطبيق اختبار التكامل على الدالة $f(x) = -1/x$.

(ج) إذا كانت $0 \leq \sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n b_k$ وكانت $\sum b_k$ تقاربية فإن $\sum a_k$ تقاربية.

(د) إذا كانت $0 \leq a_k \leq b_k : \forall k$ فإن تباعد المتسلسلة $\sum a_k$ يستلزم تباعد المتسلسلة $\sum b_k$.

(هـ) إذا كانت $f, g : [1, +\infty \rightarrow \mathbb{R}$ متصلة وتناقصية وموجبة وكانت $f(x) \leq g(x)$ و $\int_1^\infty g(x) dx$ تقاربي فإن المتسلسلة $\sum f(k)$ تقاربية.

(و) إذا كانت $0 \leq a_k < b_k : \forall k$ وكانت $\lim_k \frac{b_{k+1}}{b_k} = 1$ فإن المتسلسلة $\sum a_k$ تقاربية.

(ز) إذا كانت $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = 1$ فإن تقارب $\sum b_k$ يستلزم تقارب $\sum a_k$.

١١.٢ تمارين.

(١) استخدم إختبار المقارنة لدراسة تقارب كل من المتسلسلات الآتية:

$$a_k = \frac{1}{k^2 + 3} \quad (١)$$

$$a_k = \frac{k^3}{k^4 + 1} \quad (٥)$$

$$a_k = \frac{1}{e^k + k^3} \quad (ب)$$

$$a_k = \frac{k^3 \cos k}{k^4 + 2} \quad (و)$$

$$a_k = \frac{1}{\ln k} \quad (ج)$$

$$a_k = \frac{k^2}{k^4 + 1} \quad (د)$$

$$a_k = \frac{10^k + k}{k^2 10^k - k} \quad (ز)$$

(٢) استخدم إختبار النسبة أو اختبار الجذر النوني لدراسة تقارب كل من المتسلسلات $\sum a_k$ الآتية:

$$a_k = \frac{1}{(2k)!} \quad (١)$$

$$a_k = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k^2} \quad (د)$$

$$a_k = \frac{1}{k^{2k+1}} \quad (ب)$$

$$a_k = \frac{k e^{k+2}}{(k+1)3^k} \quad (هـ)$$

$$a_k = \frac{(2k)!}{(k!)^2} \quad (ج)$$

$$a_k = \left(\frac{3}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2k}\right)^{k^2} \quad (و)$$

$$a_k = (\cos 1)^k \quad (ز)$$

(٣) إدرس تقارب كل من المتسلسلات $\sum a_k$ الآتية (p ترمز لعدد حقيقي ثابت):

$$a_k = \frac{k^{1000}}{e^k} \quad (\text{ا})$$

$$a_k = \frac{k + 3^k}{k^3 + e^k} \quad (\text{ب})$$

$$a_k = \sqrt{k^2 + 3} - k \quad (\text{ج})$$

$$a_k = k^{-p} \sin\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad (\text{د})$$

$$a_k = \frac{1}{k(\ln k)^p} \quad (\text{ه})$$

$$a_k = \frac{1}{k \ln k (\ln \ln k)^p} \quad (\text{و})$$

$$a_k = (\ln k)^{kp} \quad (\text{ز})$$

$$a_k = \frac{1}{(\ln k)^{\ln k}} \quad (\text{ح})$$

$$a_k = \frac{1}{(\ln \ln k)^{\ln \ln k}} \quad (\text{ط})$$

$$a_k = k^p \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \quad (\text{ي})$$

(٤) برهن أنه يوجد عدد A بحيث:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{n} + A + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (\text{ا})$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} = \frac{1}{n^2} + A + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (\text{ب})$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} = \frac{1}{2} \ln^2 n + A + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \quad (\text{ج})$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k \ln k} = \ln \ln n + A + O\left(\frac{1}{n \ln n}\right) \quad (\text{د})$$